

# Solución Explícita de las Ecuaciones en Variables de Estado de Circuitos LTI

Alfonso Bachiller Soler, José A. Rosendo Macías y Antonio Gómez Expósito

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
E.T.S. Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla (España)  
Tfno:+34 95 4487284, Fax:+34 95 4487284, email: absllhm@us.es, rosendo@us.es, age@us.es

## Resumen.

Este artículo se centra en el análisis del coste computacional para obtener la solución explícita de las ecuaciones en variables de estado de circuitos lineales e invariantes en el tiempo (LTI). En particular, se analiza la eficiencia computacional de tres métodos: Autosistema, Vandermonde y Lagrange. Se estudia también la influencia de la variación de condiciones iniciales.

## Palabras llave

Ecuación de estado, Autovalores, Autovectores, Vandermonde, Lagrange, Circuitos lineales.

## 1. Introducción

En los comienzos de la electrotecnia, los equipos de red se diseñaban en base al estudio del régimen permanente de un sistema eléctrico y a ciertos coeficientes basados en la experiencia. Sin embargo, hay situaciones en las que un sistema eléctrico abandona el régimen permanente para seguir un proceso transitorio en el cual las magnitudes eléctricas, tensión e intensidad, pueden sufrir variaciones importantes.

Los procesos transitorios en sistemas eléctricos son originados por maniobras, faltas, descargas atmosféricas o variaciones en la demanda de energía. Usualmente la duración del transitorio es muy corta comparada con el tiempo de operación en régimen permanente. Sin embargo, estos periodos transitorios son de gran importancia debido al efecto que pueden tener en el funcionamiento del sistema o sobre los equipos que forman parte de él.

Inicialmente, la necesidad de resolver estos problemas y entender los fenómenos asociados condujo a modelos físicos a escala, analizadores de redes (NA Network Analyzer), donde se estudiaban fenómenos estacionarios. Como evolución de los NA se construyeron los primeros TNA (Transient Network Analyzer) hacia los años cincuenta, y se comenzaron propiamente los estudios de transitorios electromagnéticos.

La aparición de las computadoras digitales permitió plantear modelos numéricos de procesos transitorios.

Sin embargo, durante muchos años la velocidad de simulación de los TNA fue superior a la de las computadoras. Los avances que han tenido lugar en los últimos años, han permitido reducir drásticamente el tiempo de cálculo y el coste computacional de las simulaciones, de forma que en la actualidad es aconsejable el uso del ordenador en la mayoría de las aplicaciones. Son muchos los métodos que se han desarrollado para el cálculo de transitorios electromagnéticos mediante un ordenador digital. Estos métodos se pueden dividir fundamentalmente en dos categorías: métodos en el dominio del tiempo y métodos en el dominio de la frecuencia. Este artículo se centra en aquellos métodos en el dominio del tiempo que parten directamente del circuito real, donde el objetivo es obtener un modelo matemático que refleje fielmente el comportamiento del circuito.

El artículo comienza con una revisión de tres métodos que se utilizan para obtener la solución de las ecuaciones en variables de estado: autosistema, matriz de Vandermonde y fórmula de interpolación de Lagrange. Se hace una estimación del coste computacional involucrado en cada uno de los métodos para, seguidamente establecer una comparativa entre ellos. Cierra el artículo un apéndice donde se revisa la metodología para el cálculo de autovalores.

## 2. Ecuación de Estado

En el dominio del tiempo, la dinámica de un circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo (LTI) se puede describir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones en variables de estado), conocido como ecuación de estado [1],

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado, el cual está formado por las variables de estado,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de excitaciones y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son matrices cuyos coeficientes dependen sólo de los parámetros y topología del circuito.

En ausencia de bucles capacitivos, cortes inductivos y otras restricciones impuestas por elementos activos que puedan reducir el orden de complejidad,  $\mathbf{x}$  engloba

a todas las tensiones de los condensadores y a todas las intensidades de las bobinas.

Existen numerosos métodos para formular la ecuación de estado. Algunos de ellos basados fundamentalmente en propiedades topológicas como los descritos en [2] y [3], y otros basados en el principio de superposición [4] o en la formulación Lagrangiana [5].

La solución de (1) se puede expresar como [6], [7]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_h(t) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}_f(t)$  es la respuesta forzada o respuesta permanente, y  $\mathbf{x}_h(t)$  es la respuesta natural, también conocida como respuesta a entrada cero, la cual satisface el sistema homogéneo,

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t) \quad (3)$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f(0) \quad (4)$$

Formalmente, la solución de (3) se puede expresar como [8]

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_h(0), \quad (5)$$

donde la función exponencial de una matriz está definida mediante un desarrollo en serie de potencias,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \quad (6)$$

De entre los numerosos métodos desarrollados [9] para obtener  $e^{\mathbf{A}t}$ , en este artículo se analizarán tres de los cuales obtienen la solución de forma explícita. El primero, basado en el Autosistema (autovalores y autovectores) de la matriz  $\mathbf{A}$ , es un método de descomposición matricial, mientras que los dos restantes, Vandermonde y Lagrange, son métodos polinomiales.

### 3. Método basado en el Autosistema

Toda matriz real  $\mathbf{A}$  de orden  $n$  tiene  $n$  autovalores, no necesariamente distintos, que a su vez, pueden ser reales o parejas de complejos conjugados, y que verifican la ecuación:

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}| = 0 \quad (7)$$

Para cada autovalor  $\lambda_j$ , la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{T}_j = 0 \quad (8)$$

tiene al menos una solución no trivial  $\mathbf{T}_j$ , denominada autovector de  $\mathbf{A}$ .

El autosistema de una matriz  $\mathbf{A}$  está determinado por los autovalores y autovectores de dicha matriz.

Cuando todos los autovalores de  $\mathbf{A}$  son distintos, los  $n$  autovectores asociados son linealmente independientes y la solución de (3) tiene la forma genérica [10]:

$$\mathbf{x}_h(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_j t} \mathbf{T}_j \quad (9)$$

donde  $\lambda_j$  son los autovalores (frecuencias naturales) de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{T}_j$  son autovectores arbitrariamente escalados, y  $\alpha_j$  son escalares que se determinan de forma que las condiciones iniciales sean satisfechas:

$$\mathbf{x}_h(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{T}_j \quad (10)$$

Si  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n]$  es una matriz cuyas columnas son los autovectores de  $\mathbf{A}$  entonces (10) se puede escribir en forma matricial según:

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}_h(0) \quad (11)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ .

En general, (11) será un sistema de ecuaciones algebraico complejo cuya solución requerirá un gran número de operaciones. Si  $r$  es el número de autovalores reales y  $p$  el número de parejas de autovalores complejos conjugados, entonces el sistema (11) se puede transformar, aprovechando la simetría de los números complejos conjugados, en otro real y del mismo orden,

$$\left[ \mathbf{T} \mid 2\mathbf{T}_R \mid -2\mathbf{T}_I \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_r \\ \boldsymbol{\alpha}_R \\ \boldsymbol{\alpha}_I \end{bmatrix} = \mathbf{x}_h(0) \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_r] \\ \mathbf{T}_R &= \Re[\mathbf{T}_{r+1}, \mathbf{T}_{r+2}, \dots, \mathbf{T}_{r+p}] \\ \mathbf{T}_I &= \Im[\mathbf{T}_{r+1}, \mathbf{T}_{r+2}, \dots, \mathbf{T}_{r+p}] \end{aligned} \quad (13)$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_r &= [\alpha_1, \dots, \alpha_r]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_R &= \Re[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_I &= \Im[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}]^T \end{aligned} \quad (14)$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones (12) es del mismo orden que el (11), sin embargo este es real mientras que aquel es complejo. El método más eficiente para resolver dicho sistema es aplicando la factorización LU [11], que además permite aprovechar un buen número de operaciones si varían las condiciones iniciales ( $\mathbf{x}_h(0)$ ).

Para aplicar este método es necesario conocer los autovectores de la matriz  $\mathbf{A}$ . Salvo casos particulares, el cálculo de autovectores resolviendo una ecuación como la (8) por cada uno de los autovalores es inadmisiblemente computacionalmente. Uno de los métodos más utilizados consiste en obtener la forma de Hessenberg de la matriz  $\mathbf{A}$  y entonces resolver el siguiente sistema homogéneo por cada autovector que se quiera obtener:

$$(\mathbf{H} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{Z}_j = 0 \quad (15)$$

Para ello se aplica la eliminación Gaussiana con intercambio de filas. Al ser una matriz singular aparecerá un pivote cero, el cual usualmente es el último [12]. Asignando el valor 1 a la correspondiente variable donde haya resultado el pivote cero [13], se puede

efectuar la sustitución hacia atrás, obteniendo  $\mathbf{Z}_j$  (que no es el autovector de  $\mathbf{A}$ ). Para hallar el autovector de  $\mathbf{A}$  es necesario deshacer la transformación ortogonal:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{U}_o \mathbf{Z}_j \quad (16)$$

donde  $\mathbf{U}_o$  es la misma matriz de la transformación que aparece en (27).

#### 4. Matriz de Vandermonde

La idea de este método es obtener el autovector

$$\mathbf{C}_j = \alpha_j \mathbf{T}_j \quad (17)$$

sin necesidad de calcular previamente los  $\alpha_j$  y los  $\mathbf{T}_j$ . De esta forma, la componente  $i$ -ésima de la respuesta natural (9) se puede expresar como

$$x_{hi}(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

Si se calcula la  $m$ -ésima derivada de (18) se llega a la siguiente ecuación:

$$x_{hi}^{(m)}(t) = \frac{d^m x_{hi}}{dt^m} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^m c_{ij} e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

a partir de la cual se puede obtener un sistema de ecuaciones lineales sin más que ir escribiéndola sucesivamente para  $m = 0, \dots, n-1$ , y particularizándola para  $t = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ c_{i3} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{hi}(0) \\ x_{hi}^{(1)}(0) \\ x_{hi}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ x_{hi}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

La matriz de coeficientes del sistema (20) es una **matriz de Vandermonde** [14],[15], que en este caso se obtiene a partir de los autovalores de  $\mathbf{A}$ . Por otro lado, el vector del término de la derecha de (20) se puede obtener recursivamente seleccionando la  $i$ -ésima componente de la secuencia de vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h(0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f(0) \\ \mathbf{x}_h^{(1)}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_h(0) \\ \mathbf{x}_h^{(2)}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_h^{(1)}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_h^{(m)}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_h^{(m-1)}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_h^{(n-1)}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_h^{(n-2)}(0) \end{aligned} \quad (21)$$

Obtener la solución explícita de la ecuación de estado requiere calcular la matriz de Vandermonde, lo que supone conocer los autovalores de  $\mathbf{A}$ , calcular cada uno de los vectores de (21) y resolver de manera

eficiente tantos sistemas lineales (20) como variables de estado se deseen conocer.

#### 5. Formula de Interpolación de Lagrange

Este método proporciona una formula cerrada para el cálculo de cada autovector de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{C}_j = \left[ \prod_{i \neq j} \frac{(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\lambda_j - \lambda_i} \right] \mathbf{x}_h(0) \quad (22)$$

La expresión (22) es conocida como **formula de interpolación de Lagrange** [9], [14], [16]. Obsérvese que, mientras cada solución de (20) proporciona una fila de la matriz  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n]$ , la formula de Lagrange constituye una expresión cerrada para cada columna de  $\mathbf{C}$ .

Según (22), el cálculo de cada  $\mathbf{C}_j$  se puede expresar como una secuencia de productos matriz-vector, de derecha a izquierda, como sigue:

$$\mathbf{C}_j = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} [(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \dots [(\mathbf{A} - \lambda_{j-1} \mathbf{I}) \dots [(\mathbf{A} - \lambda_{j+1} \mathbf{I}) \dots [(\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{x}_h(0)]]]] \quad (23)$$

En realidad,  $\mathbf{C}_j$  es una medida de la contribución de cada variable de estado en el modo  $j$ , el cual está caracterizado por el correspondiente autovalor  $\lambda_j$ .

#### 6. Ejemplo

El objetivo es obtener la evolución temporal de la tensión en cada condensador y de la intensidad que circula por la bobina del circuito de la figura (1).

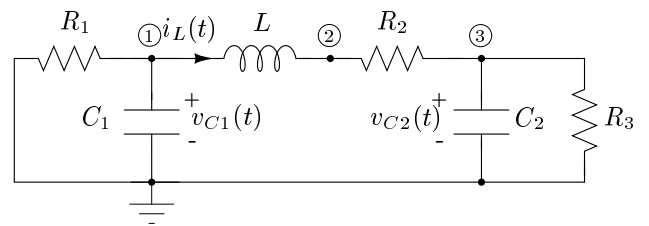


Figura 1: Circuito de ejemplo

El valor de cada uno de los elementos es

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega ; L = 2 \text{ H} ; C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$$

mientras que las condiciones iniciales son las siguientes:

$$v_{C1}(0) = 1 \text{ V} ; v_{C2}(0) = 2 \text{ V} ; i_L(0) = 1 \text{ A}$$

La ecuación de estado resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

A partir de la cual se pueden obtener con facilidad sus autovalores:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3^* = \frac{-3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

### A. Autosistema

Para obtener la solución utilizando el método del autosistema es necesario calcular los autovectores de la matriz  $\mathbf{A}$ . Al tratarse de una matriz de orden reducido los autovectores se pueden calcular directamente resolviendo dos ecuaciones (una para cada autovalor) del tipo:

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{T}_j = 0$$

Procediendo de esta forma, se obtienen los siguientes autovectores:

$$\mathbf{T}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{T}_2 = \left[ -1 \quad 1 \quad \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4} \right]^T$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_2^* = \left[ -1 \quad 1 \quad \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4} \right]^T$$

Para matrices de orden superior es imperativo el uso de la matriz de Hessenberg para no aumentar en demasía el coste computacional y no incurrir en errores apreciables cuando se trabaja con precisión finita.

De acuerdo con la expresión (12), el vector  $\alpha$  se determina resolviendo el sistema de ecuaciones con coeficientes reales,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{15}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2^R \\ \alpha_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

resultando lo siguiente:

$$\alpha = \left[ \frac{3}{2} \quad \frac{1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \right]^T$$

En consecuencia, las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a las variables de estado son

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \left[ \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 0 \right]^T e^{-t}$$

$$+ \left[ \frac{-1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{30} \right]^T e^{(-\frac{3+j\sqrt{15}}{4})t}$$

$$+ \left[ \frac{-1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{30} \right]^T e^{(-\frac{3-j\sqrt{15}}{4})t}, \quad (24)$$

las cuales, desarrollando las exponenciales complejas quedan como sigue:

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \left[ \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 0 \right]^T e^{-t}$$

$$+ \left[ \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \right]^T e^{-3t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) \quad (25)$$

$$+ \left[ \frac{-7\sqrt{15}}{30} \quad \frac{7\sqrt{15}}{30} \quad \frac{\sqrt{15}}{15} \right]^T e^{-3t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)$$

### B. Matriz de Vandermonde

Siguiendo con el mismo circuito del ejemplo, a continuación se ilustrará el método de Vandermonde. Para ello, el primer paso es obtener la matriz de Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{-3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{-3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4} \\ 1 & \frac{-3}{8} - j\frac{3\sqrt{15}}{8} & \frac{-3}{8} + j\frac{3\sqrt{15}}{8} \end{bmatrix}$$

A continuación se calculan cada uno de los vectores  $x^{(k)}(0)$ :

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x}^{(1)}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del sistema de ecuaciones (20) se obtienen las constantes  $c_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \\ \frac{-1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \\ \frac{1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{30} \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{30} \end{bmatrix}$$

A partir de las cuales, la solución general se obtiene según:

$$v_{C1}(t) = c_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + c_{12} \cdot e^{\lambda_2 t} + c_{13} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$v_{C2}(t) = c_{21} \cdot e^{\lambda_1 t} + c_{22} \cdot e^{\lambda_2 t} + c_{23} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$i_L(t) = c_{31} \cdot e^{\lambda_1 t} + c_{32} \cdot e^{\lambda_2 t} + c_{33} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

### C. Fórmula de Lagrange

Para ilustrar el método de Lagrange se utilizará nuevamente el circuito del ejemplo, para el cual es necesario obtener los vectores  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  y  $\mathbf{C}_3$  correspondientes a las frecuencias naturales  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = \lambda_3^* = \frac{-3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}$ . Según la fórmula de interpolación de Lagrange (22):

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \cdot (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x}(0)$$

$$= \left[ \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 0 \right]^T$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x}(0)$$

$$= \left[ \frac{-1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{30} \right]^T$$

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_2^* = \left[ \frac{-1}{4} - j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{4} + j\frac{7\sqrt{15}}{60} \quad \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{30} \right]^T$$

Una vez obtenidos todos los vectores  $\mathbf{C}_j$ , la evolución temporal de las variables de estado se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \mathbf{C}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \mathbf{C}_3 \cdot e^{\lambda_3 t}$$

Es fácil comprobar que el resultado es el mismo que el obtenido en los ejemplos anteriores.

## 7. Coste computacional

En esta sección se hace un análisis del coste computacional asociado con cada uno de los métodos descritos anteriormente para calcular  $\mathbf{x}_h(t)$ . Como unidad de medida se utilizará el flop (número total de operaciones en punto flotante) [17]. Cualquier operación aritmética con números reales genera 1 flop. Con números complejos, cada multiplicación/división genera 6 flops, mientras que cada suma/resta genera 2 flops.

Para tener una estimación del coste computacional de cada método, se va a suponer que la matriz  $\mathbf{A}$  es densa y que todos sus autovalores son parejas de complejos conjugados.

Los tres métodos analizados requieren el cálculo previo de los autovalores, lo cual según el apéndice I supone un coste de  $\frac{40}{3}n^3$  flops.

### A. Autosistema

Aparte de obtener los autovalores, son necesarias las siguientes operaciones:

- Autovectores ( $\mathbf{T}_j$ ):
  - Obtener la matriz  $\mathbf{U}_o$ :  $4n^3/3$  flops
  - Por cada autovector ha de realizarse la factorización LU de  $(\mathbf{H} - \lambda_j \mathbf{I})$  más la sustitución hacia atrás (Backward). Esto implica  $8n^2 + 5n - 6$  flops. Si se aprovecha la simetría de los complejos conjugados, sólo se requiere resolver  $n/2$  sistemas distintos, de manera que solo se requieren  $(4n^3 + 2.5n^2 - 3n)$  flops.
  - Realizar  $n/2$  productos matriz-vector complejo,  $\mathbf{U}_o \mathbf{Z}_j$ :  $(4n^3 - n^2)$  flops.

En total se necesitan  $\frac{28}{3}n^3 + 1.5n^2 - 3n$  flops para obtener todos los autovectores de  $\mathbf{A}$ .

- Vector  $\boldsymbol{\alpha}$ : Considerando que todos los autovectores son complejos conjugados, este vector columna se puede obtener resolviendo un sistema de ecuaciones de orden  $n$  con coeficientes reales, con un coste de  $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$  flops.
- Si se necesitan todas las variables de estado, hay que añadir  $3n^2$  flops para contabilizar los productos  $\boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{T}_j$ . Si solo se necesita una variable de estado, se requieren tan solo  $3n$  flops.

El coste total de este método es de  $\frac{70}{3}n^3 + 6n^2 - \frac{25}{6}n$  flops si se quieren obtener todas las variables de estado; y  $\frac{70}{3}n^3 + 3n^2 - \frac{7}{6}n$  flops si solo se desea obtener una sola variable de estado.

Si varían las condiciones iniciales, es fácil comprobar que sólo es necesario efectuar el Forward-Backward del sistema  $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}_h(0)$ , y el producto de los  $n/2$  términos  $\alpha_j \mathbf{T}_j$ . De esta forma solo se necesitan  $5n^2 - n$  flops para obtener nuevamente todas las variables de estado, y tan solo  $2n^2 + 2n$  flops para obtener nuevamente una sola variable de estado.

### B. Matriz de Vandermonde

Aparte de obtener los autovalores ( $\frac{40}{3}n^3$  flops), la aplicación del método Vandermonde implica las siguientes operaciones previas:

- Asumiendo que los autovalores son parejas de complejos conjugados, obtener la matriz de Vandermonde requiere  $n(n-2)/2$  multiplicaciones complejas, esto es,  $3n^2 - 6n$  flops.
- Obtener el conjunto de términos  $x_h^{(k)}(0)$  de (21) supone realizar una resta de dos vectores y  $(n-1)$  productos matriz-vector, lo cual implica un total de  $2n^3 - 3n^2 + 2n$  flops.

Para resolver el sistema de Vandermonde, hay que tener en cuenta el número de variables que se quieren obtener. Si solo se quiere calcular una variable, el método mas barato es utilizar el correspondiente a sistemas de Vandermonde [11], cuyo coste es de  $9n^2 - 9n$  flops. De esta forma, si se quiere obtener una sola variable de estado son necesarios  $\frac{46}{2}n^2 + 9n^2 - 13n$  flops.

Si, en cambio, se quieren obtener todas las variables, el método más eficiente es utilizar la factorización LU. Teniendo en cuenta la simetría de los complejos conjugados, el sistema de ecuaciones de Vandermonde (20) se puede reescribir como un sistema de orden  $n$  real, cuya factorización se realiza solo una vez con  $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$  flops. Para obtener los respectivos coeficientes  $c_{ij}$  de (18), se necesita realizar  $n$  procesos forward/backward con un coste total de  $2n^3 - n^2$  flops. Esto da lugar a un coste total de  $\frac{54}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{25}{6}n$  flops.

Obtener la respuesta de una variable de estado para distintas condiciones iniciales, supone un coste computacional de  $2n^3 + 6n^2 - 7n$  flops.

En el caso de todas las variables de estado, si se modifican las condiciones iniciales sólo es necesario volver a calcular el conjunto de vectores (21), con un coste de  $2n^3 - 3n^2 + 2n$  flops, realizar  $n$  sustituciones hacia adelante (forward) y  $n$  sustituciones hacia atrás (backward) con un coste de  $n(2n^2 - n)$  flops. En total se requieren  $4n^3 - 4n^2 + 2n$  flops.

### C. Formula de Lagrange

Una vez obtenidos los autovalores, este método necesita los siguientes pasos previos:

- Calcular las matrices  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$  ( $n^2$  flops).
- Calcular las restas de autovalores  $(\lambda_j - \lambda_i)$ , con un coste de  $n(3n - 2)/8$  flops.

El cálculo de cada vector  $\mathbf{C}_j$  comprende el producto de  $(n - 1)$  términos  $(\lambda_j - \lambda_i)$ ,  $(n - 1)$  productos matriz-vector y 1 cociente vector-escalar. Debido a la simetría de los complejos conjugados, sólo se necesitan obtener  $n/2$   $\mathbf{C}_j$ .

De esta forma, el coste total del método es de  $4n^4 - 5n^3 + 7n^2 - 6n$  flops.

En el caso de que varíen las condiciones iniciales sólo es necesario calcular nuevamente los productos matriz-vector y los cocientes vector-escalar. Así, el coste computacional adicional es de  $4n^4 - 5n^3 + 4n^2$  flops.

## 8. Análisis Comparativo

En esta sección se hará un análisis comparativo del coste computacional de cada uno de los métodos. Según la Figura 2, el método de Vandermonde es el que requiere un menor número de operaciones cuando se quiere obtener la evolución temporal de todas las variables de estado de un circuito eléctrico.

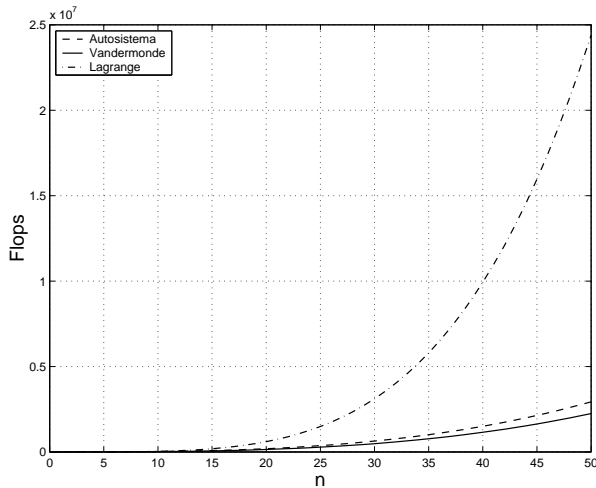


Figura 2: Flops para obtener **todas** las variables de estado.

En el caso que sólo se necesite obtener la evolución temporal de una única variable de estado es necesario destacar que tanto el método basado en el autosistema y el de Vandermonde tienen un coste computacional muy similar (Figura 3).

Así mismo, en ambas situaciones el método basado en la fórmula de interpolación de Lagrange requiere un número de operaciones muy superior al de los restantes métodos; por este motivo no será considerado en los siguientes análisis.

Una situación que aparece frecuentemente en la práctica es aquella en la que es necesario obtener la evolución temporal de una o de todas las variables de estado para distintas condiciones iniciales. En ese caso, según se muestra en la Figura 4 y 5, el método que

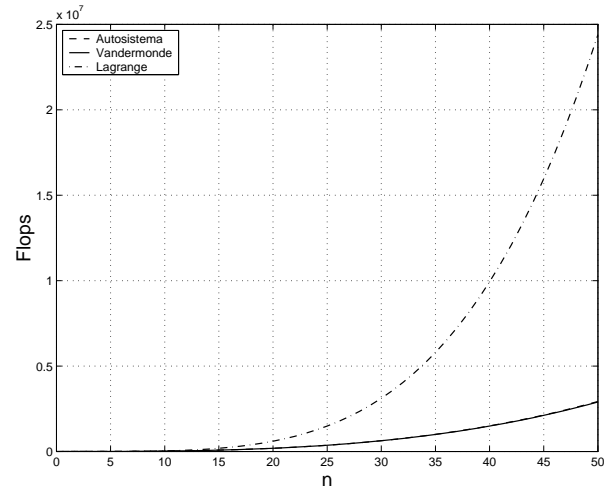


Figura 3: Flops para obtener **una** variable de estado

requiere un menor número de flops adicionales es el basado en el autosistema.

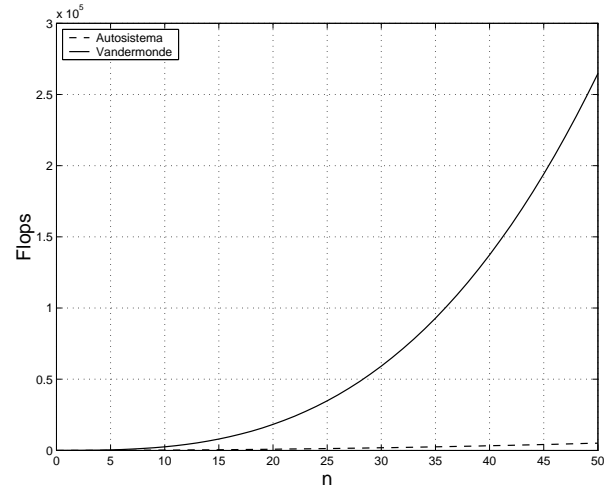
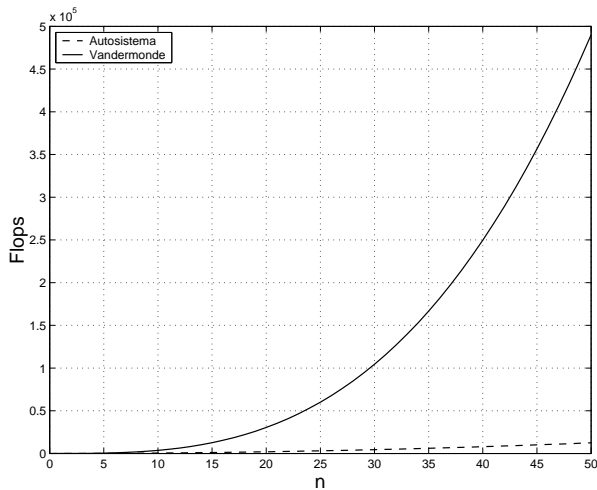


Figura 4: Flops adicionales para obtener **una** variable de estado cuando cambian las condiciones iniciales.

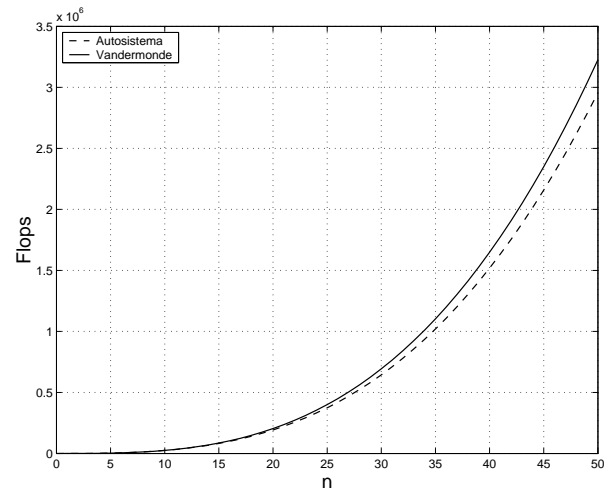
Por tanto, queda claro que cuando se quiera obtener una o todas las variables de estado para una condición inicial, el método más barato computacionalmente es el basado en la matriz de Vandermonde. Sin embargo, si se quiere obtener la respuesta de una misma variable o de todas las variables de estado para distintas condiciones iniciales, no está tan claro el método más apropiado. Para ello, en las Figuras 6 y 7 se ha representado el coste total involucrado en el cálculo de una y de todas las variables de estado para 2 condiciones iniciales distintas. A partir de este resultado, se puede concluir que el método basado en el Autosistema es el que requiere un menor número de operaciones cuando se desee obtener la evolución temporal para distintas condiciones iniciales.

## 9. Conclusiones

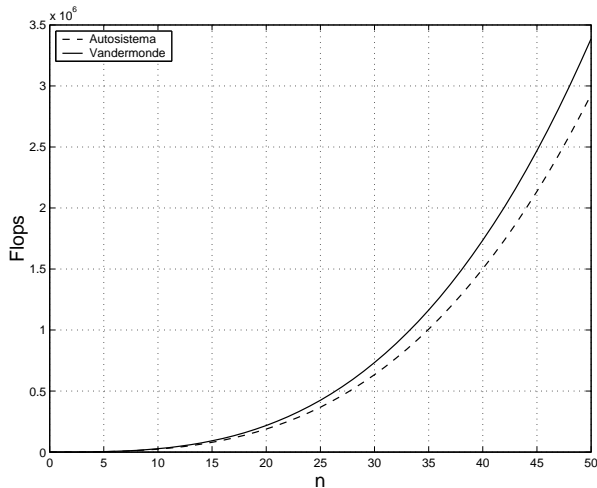
En este artículo se ha analizado y evaluado el coste



**Figura 5:** Flops adicionales para obtener **todas** las variables de estado cuando cambian las condiciones iniciales.



**Figura 7:** Coste total para obtener todas las variables de estado para 2 condiciones iniciales



**Figura 6:** Coste total para obtener una variable de estado para 2 condiciones iniciales

computacional de tres métodos para obtener la solución explícita de las ecuaciones en variables de estado de circuitos lineales e invariantes en el tiempo.

Basándonos en el coste computacional, se ha visto que el método basado en la fórmula de interpolación de Lagrange es prohibitivo, exhibiendo un coste computacional un orden superior a los restantes.

En las situaciones en las que se quiera obtener una o todas las variables de estado para una única condición inicial, el método que requiere un menor número de operaciones es el basado en la matriz de Vandermonde.

Sin embargo, cuando sea necesario obtener la evolución temporal para distintas condiciones iniciales el método más aconsejable es el basado en el autosistema.

## Apéndice I. Cálculo de Autovalores

En general, el cálculo de autovalores resolviendo el

determinante

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}| = 0 \quad (26)$$

solo es viable computacionalmente para matrices de orden pequeño. Cuando se trabaja con matrices de gran dimensión hay que recurrir a métodos numéricos que resuelvan de manera económica el problema.

Uno de los métodos más utilizados consiste en obtener la forma de Schur de la matriz  $\mathbf{A}$  mediante una transformación ortogonal, que en el caso real es:  $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ , donde  $\mathbf{Q}$  es una matriz ortogonal, y  $\mathbf{T}$  es una matriz cuasitriangular superior. Los autovalores reales de  $\mathbf{A}$  aparecen en la diagonal de  $\mathbf{T}$ , mientras que los autovalores complejos conjugados aparecen en bloques  $2 \times 2$  sobre la diagonal de  $\mathbf{T}$ .

Con objeto de obtener la forma de Schur eficientemente, la matriz  $\mathbf{A}$  se reduce previamente a su matriz de Hessenberg con una transformación ortogonal de la forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_o^T \mathbf{A} \mathbf{U}_o \quad (27)$$

donde  $\mathbf{U}_o$  se puede obtener mediante productos de matrices de Householder [18]. El coste computacional para calcular la forma de Hessenberg de la matriz  $\mathbf{A}$  es de  $10n^3/3$  flops [11]. Para el cálculo de autovalores no es necesario obtener  $\mathbf{U}_o$  de forma explícita, lo que conllevaría a un coste adicional de  $4n^3/3$  flops.

Una vez obtenida la forma de Hessenberg, se aplica el algoritmo QR, tal y como se describe en [11], obteniendo, tras una serie de iteraciones, la forma de Schur. Según [11], el coste computacional medio asociado con este proceso es de  $10n^3$  flops. Según [18], utilizar la matriz de Hessenberg, en vez de la matriz  $\mathbf{A}$ , para acometer el algoritmo QR reduce un orden el número de flops, es decir de  $O(n^3)$  a  $O(n^2)$ .

En resumen, el coste computacional necesario para obtener los autovalores de una matriz real  $\mathbf{A}$  es el siguiente:

$$\frac{10}{3}n^3 + 10n^3 = \frac{40}{3}n^3 \text{ flops}$$

## Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación recibida del Ministerio de Ciencia y Tecnología (MCYT) del Estado Español complementada con fondos FEDER a través de los proyectos de investigación ENE2004-06117 y ENE2004-06951.

## Referencias

- [1] L. O. Chua, C. A. Desoer, and E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, 1987.
- [2] N. Balabanian and T. Bickart, *Linear Network Theory*. Matrix series in circuits and systems, 1981.
- [3] Y.-S. Huang and S.-P. Chan, "A new state-variable formulation of network equations for linear networks," in *Circuits, Systems and Computers Conference*, November 1977, pp. 396–400.
- [4] D. L. Skaar, "Using the superposition method to formulate the state variable matrix for linear networks," *IEEE Trans. Educ.*, vol. 44, no. 4, pp. 311–314, November 2001.
- [5] J. Meisel, "State equations of electrical networks from a lagrangian formulation," *IEEE Trans. On Circuit Theory (Correspondence)*, pp. 219–221, May 1969.
- [6] D. E. Johnson, J. R. Johnson, and J. L. Hilburn, *Electric Circuit Analysis*. Prentice Hall, 1992.
- [7] A. B. Carlson, *Circuits*. Thomson Learning, 2000.
- [8] R. I. Madrigal, *Circuitos Eléctricos*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A., 1977.
- [9] C. Moler and C. V. Loan, "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix," *SIAM Review*, vol. 20, no. 4, pp. 801–836, 1978.
- [10] R. K. Nagle, E. B. Saff, and A. D. Snider, *Fundamentals of Differential Equations*. Addison-Wesley, 2000.
- [11] G. H. Golub and F. V. Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [12] J. E. V. Ness, "Inverse iteration method for finding eigenvectors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 4, no. 1, pp. 63–66, February 1969.
- [13] J. E. V. Ness, J. M. Boyle, and F. P. Imad, "Sensitivities of large, multiple-loop control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 10, no. 3, pp. 308–315, July 1965.
- [14] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, 1965.
- [15] K. R. Rao, "Evaluation of transition matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 14, no. 6, pp. 779–780, December 1969.
- [16] T. M. Apostol, *Calculus, 2nd ed., Vol. 2: Multivariable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*. Massachusetts: Blaisdell Publishing Company, 1969.
- [17] M. Pierzchala and B. Rodanski, "Efficient generation of symbolic network functions for large-scale circuits," in *MWCAS'96*, vol. 1, Aug 1996, pp. 425–428.
- [18] C. P. Neuman, "On the LU factorization of Hessenberg matrices," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 19, no. 1, pp. 139–140, January 1989.